La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 8 - \frac{45}{u_n + 6}$$

1. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n **supérieur ou égal à 1** :

$$1 < u_n < 3$$

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $\mathrm{v}_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{9}$. Préciser son premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n puis u_n en fonction de n.

d) Retrouver les résultats de la question **1**.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les propositions :

- $P(n)$: « $8^n - 1$ est divisible par 7 » ;
- $R(n)$: « $8^n + 1$ est divisible par 7 ».

Rappel *: dire qu'un entier a divise un entier b signifie qu'il existe un entier k tel que $b = k \times a$. On dit alors que b est un multiple de a.*

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est héréditaire.

3. En raisonnant par l'absurde, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est fausse.